Séries numériques 10h

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Vocabulaire

1°) Série numérique

Déf : Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On appelle série de terme général u_n, notée $\sum u_n$ ou $\left(\sum u_n\right)_{n\geq n_0}$, la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ avec $S_n=\sum_{k=n_0}^{n} u_k$. Le terme S_n est appelé somme partielle de rang n de cette série.

2°) Convergence et divergence

a) définition

Déf : On dit que la série $\sum u_n$ converge ssi la suite des sommes partielles $S_n=\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge. Sa limite est alors appelée somme de la série et on la note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Sinon, on dit que la série diverge.

Prop : On ne modifie pas la nature d'une série si l'on en modifie un nombre fini de terme de celle-ci. En revanche, l'éventuelle somme sera certainement modifiée.

b) reste d'une série convergente

Déf : Si la série $\sum u_n$ est convergente alors on peut définir la somme $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Cette quantité est appelée reste de rang n de la série $\sum u_n$.

Prop : On a alors $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k=\sum_{k=0}^{n} u_k+\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

c) divergence grossière

Prop : Pour que la série de terme général u_n converge, il est nécessaire que $u_n\to 0$.

Déf : Si $u_n \not\to 0$ alors on dit que la série de terme général u_n diverge grossièrement (DVG).

3°) Opérations sur les séries convergentes

Prop : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes alors pour tout $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, la série $\sum \lambda u_n+\mu v_n$ est convergente et on a la relation $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k+\mu v_k=\lambda\sum_{k=0}^{+\infty} u_k+\mu\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.

Prop : Si $\sum z_n$ converge alors $\sum \overline{z_n}$ l'est aussi et $\overline{\sum_{k=0}^{+\infty} z_k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\overline{z_k}$.

$\sum z_n$ converge ssi $\sum \mathrm{Re}(z_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(z_n)$ convergent et alors $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{Re}(z_k)+i\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{Im}(z_k)$.

4°) Séries de référence

Théorème : (séries géométriques)

Soit $q\in\mathbb{C}$. La série de terme général q^n converge ssi $|q|<1$ et si tel est le cas sa somme vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k=\frac{1}{1-q}$.

Théorème : (séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Déf : Pour $\alpha > 1$, on pose $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ce qui définit la fonction zêta de Riemann.

II. Absolue convergence et séries à termes positifs

1°) Série à termes réels positifs

Déf : Une série à termes positifs (SATP) est une série dont le terme général appartient à $\mathbb{R}^+$.

Prop : Soit $\sum u_n$ une SATP. On a équivalence entre :

(i) la série converge

(ii) la suite de ses sommes partielles est majorée.

De plus, si tel est le cas, $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} u_k$.

2°) Comparaison des SATP

Prop : Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux SATP telles que pour tout n , $u_n \leq v_n$.

Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.

Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge aussi.

Théorème :

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux SATP.

Si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge aussi.

Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge aussi.

Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

3°) Outils pratiques

Outil : Si $u_n \sim C/n^\alpha$ avec $C \neq 0$ alors $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 1$.

Outil : S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \to 0$ alors $\sum u_n$ converge.

Outil : Si $nu_n \to \ell \neq 0$ alors $\sum u_n$ diverge.

4°) Absolue convergence

Théorème :

Soit $\sum u_n$ une série numérique.

Si la série de terme général $|u_n|$ converge alors $\sum u_n$ converge aussi.

Déf : Lorsque $\sum |u_n|$ est convergente, on dit que $\sum u_n$ est une série absolument convergente (ACV).

Prop : Si $\sum u_n$ est ACV alors $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Prop : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont ACV alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ est ACV.

Déf : Une série convergente sans être absolument convergente est dite semi-convergente (SCV).

5°) Absolue convergence par comparaison

Théorème :

Si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ est ACV alors $\sum u_n$ est ACV.

Si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum v_n$ est ACV alors $\sum u_n$ est ACV.

Si $u_n \sim v_n$ et si $\sum v_n$ est ACV alors $\sum u_n$ est ACV.

6°) Règle de d'Alembert

Théorème :

Soit $\sum u_n$ une série à termes non nuls. On suppose que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \ell \in \mathbb{R}^+$.

Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ est DVG

Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ est ACV.

Si $\ell = 1$ alors on ne peut rien dire.

III. Outils adaptés aux séries semi-convergentes

1°) Séries alternées

Déf : Une suite (u_n) est dite alternée ssi $\forall n, u_n = (-1)^n |u_n|$ ou $\forall n, u_n = (-1)^{n+1}|u_n|$.

Une série $\sum u_n$ est dite alternée ssi la suite (u_n) l'est.

Théorème : (Critère de Leibniz ou CSSA)

Soit $\sum u_n$ une série alternée.

Si la suite $(|u_n|)$ est décroissante et si $|u_n| \to 0$ alors la série $\sum u_n$ est convergente.

De plus, pour tout n, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Cor : Le signe de la somme est de son premier terme.

2°) Exploitation de développement asymptotique

3°) Encore plus fin : une transformation d'Abel

IV. Applications

1°) Produit infini

Idée : Pour étudier $\prod_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} u_k$, on passe au logarithme dans la mesure où cela est possible.

2°) Etude de suites

Idée : La suite de terme général u_n et la série de terme générale $u_{n+1} - u_n$ ont même nature.

En effet $\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$.

3°) La constante d'Euler

Prop : La suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ est convergente.

Déf : On pose $\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right)$ appelée constante d'Euler. On a $\gamma = 0{,}577$ à 10^{-3} près.

Prop : Il découle de ce résultat que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

4°) Formule de Stirling

Théorème :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}.$$

V. Comparaison avec une intégrale

Idée : Pour f monotone il est possible d'encadrer $f(n)$ par $\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_{n}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$. Cela permet d'étudier la nature de la série de terme général $f(n)$ mais aussi de réaliser des encadrements de sommes partielles ou de restes de la série de terme général $f(n)$.

1°) Séries de Riemann convergentes

Pour $\alpha > 1$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

2°) Séries de Riemann divergentes

Pour $\alpha = 1$, on sait déjà : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

Pour $0 < \alpha < 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$

Pour $\alpha \leq 0$, $\alpha = -\beta$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} k^\beta \sim \frac{1}{\beta+1} n^{\beta+1}$

3°) Un résultat général

Théorème :

Soit $f : [A, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux, décroissante et positive.

La série de terme général $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$ est convergente.

Cor : Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_A^x f(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$ alors la série de terme général $f(n)$ converge.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_A^x f(t)\mathrm{d}t = +\infty$ alors la série de terme général $f(n)$ diverge.

VI. Sommation des relations de comparaison

1°) Cas de la convergence

Théorème :

Soit $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une SATP convergente.

Si $u_n = o(v_n)$ alors $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

Si $u_n = O(v_n)$ alors $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

Si $u_n \sim v_n$ alors $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

2°) Cas de la divergence

Théorème :

Soit $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une SATP divergente.

Si $u_n = o(v_n)$ alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

Si $u_n = O(v_n)$ alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.

VII. Réorganisation des termes d'une somme

1°) Interversion de l'ordre de sommation

Théorème :

Si $\sum u_n$ est ACV alors pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, $\sum u_{\sigma(n)}$ est ACV et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

2°) Série double

Théorème de Fubini :

Soit $u_{p,q} \in \mathbb{C}$ pour $p,q \in \mathbb{N}$.

Si pour tout q $\sum_{p\geq 0} |u_{p,q}|$ converge et si $\sum_{q\geq 0}\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|$ alors les sommes qui suivent existent et on a l'égalité :

$\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}$.

3°) Produit de Cauchy

Déf : On appelle produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Théorème :

Si $\sum u_p$ et $\sum v_q$ sont ACV alors $\sum w_n$ est ACV et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right)$.

4°) Application : l'exponentielle complexe

Théorème :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n$ est ACV. Sa somme est appelée exponentielle complexe de z et est notée $\exp(z)$.

Prop : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $\exp(z)\exp(z') = \exp(z+z')$ et $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{\exp(z)} = \exp \overline{z}$.

Prop : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \mathrm{e}^x$.